Lösung einer Knobelaufgabe

Annegret Weng
Hochschule für Technik, Stuttgart

19. September 2012

1 Die Aufgabe

In einem kleinen Büchlein im DinA6-Format mit mathematischen Knobeleien von Martin Gardner aus dem Jahr 1978 [1] bin ich auf folgende Aufgabe unter der Überschrift 'Die blauäugigen Schwestern' gestoßen:

> *'Wenn man zufällig zwei Schwestern aus der Familie Jones auf der Straße trifft (was bedeuten soll, dass es sich dabei um eine echte Zufallsauswahl unter sämtlichen Töchtern der Familie Jones handelt), stehen die Chancen fünfzig zu fünfzig, dass beide Mädchen blaue Augen haben. Wieviele blauäuige Töchter dürfte es in der Familie Jones (wenn man diesen Umstand in Rechnung stellt) geben?'*

Sei n die Anzahl der Töchter der Familie Jones und b die Anzahl der blauäugigen Töchter. Dann erhalten wir die Gleichung

$$\frac{b(b-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Ein wenig Ausprobieren führt auf die kleinste ganzzahlige Lösung $n = 4$ und $b = 3$. Wer sich damit nicht zufrieden gibt, kann nach weiteren Lösungen suchen und mit einem Excel-Spreadsheet entdecken wir als nächstgrößere Lösung $n = 21$ und $b = 15$. Diese wird auch in [1] erwähnt: *'Weil nun aber Familien mit 21 Töchtern eine Rarität sein dürften, ist es vernünftig anzunehmen, dass es insgesamt vier Schwestern Jones gibt, von denen drei blaue Augen haben.'*

2 Suche nach einer umfassenden Lösung

Für den Mathematiker ist der Spaß aber hier noch nicht zu Ende. So habe ich mich gefragt, ob es unendlich viele ganzzahlige Lösungen für die Gleichung (1) gibt und wie diese systematisch bestimmt werden können. Tatsächlich läst sich dies recht einfach beantworten.
Wir suchen ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$$2b(b-1) = n(n-1).$$

Durch quadratische Ergänzung läßt sich diese in der Form

$$2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

schreiben. Dies ist äquivalent zu

$$-\frac{1}{4} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2,$$

also

$$-1 = (2n-1)^2 - 2(2b-1)^2.$$

Wir suchen also ganzzahlige, ungerade Lösungen der Gleichung

$$-1 = x^2 - 2y^2. \tag{2}$$

3 Die Pellsche Gleichung

Die Gleichung (2) ist aber eine ganz bekannte Gleichung, denn sie beschreibt die Einheitgruppe im Ganzheitsring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Dies sind die Element der Menge $\{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$, für die

$$a^2 - 2b^2 = 1$$

gilt. Es ist bekannt, dass die Gleichung (2) unendlich viele Lösungen hat und diese lassen sich mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ bestimmen (vergleiche [2]). Die kleinste Lösung der Gleichung ist

$$a_0 = 1, b_0 = 1,$$

was aber eingesetzt in (1) auf den Bruch $\frac{0}{0}$ führt, also keine sinnvolle Lösung ergibt. Die weiteren Lösungen erhalten wir durch Matrixmultiplikation der ursprünglichen Lösung mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Wir sehen leicht, dass a_k und b_k genau dann beide ungerade sind, wenn k gerade ist. So ergibt (a_2, b_2) gerade die kleinste (und praktisch relevante) Lösung $n = 4$ und $b = 3$, und (a_4, b_4) führt auf die Lösung $n = 21$ und $b = 15$. Das Problem der blauäugigen Schwester hat also unendlich viele Lösung (von denen aber nur eine praktisch relevant ist), und es gibt einen einfachen Algorithmus, um sie alle aufzuzählen.

Literatur

[1] Gardner, M., *Kopf oder Zahl? Paradoxa und mathematische Knobeleien*, Spektrum der Wissenschaft-Verlag, 1978

[2] M.J.Jacobson Jr.,H.C.Williams, *Solving the Pell Equation*,CMS Books in Mathematics, Springer 2009, ISBN 978-0-387-84922-5